Cours 6.2
17.10.24

Exemples de sous-espaces :

(E.V = espace vectoriel
SEV = sous-espace vectoriel)

0) Si V est un E.V

alors $W = \{0_V\}$

est un S.E.V de V

c'est le sous-espace nul/trivial de V

0,5) V est sous-E.V de lui-même.

$$\{0_V\} \subseteq V$$

et en général tout S.E.V W de V

$$\{0_V\} \subseteq W \subseteq V$$

1) Soit $V = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ $\quad n \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ fixé

alors $\mathbb{P}_n \overset{\text{déf}}{:=} \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f$ est un polynôme de degré $\leq n \}$

est un S.E.V de V et, mieux, on a une "suite" de S.E.V :

$$\mathbb{P}_{-\infty} \subset \mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}_2 \subset \cdots \subset \mathbb{P}_n \subset \cdots \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$\{0_V\}$ $\quad$ les constantes $\quad$ les pol. de degré ≤ 1

Notation : $\mathbb{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_n \underset{\text{SEV}}{\subset} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

est appelé l'espace des polynômes réels

autre notation $\mathbb{P} = \mathbb{R}[t]$

(ex $\quad 7t^{15} - \frac{1}{7}t^6 + t + \frac{1}{10}$

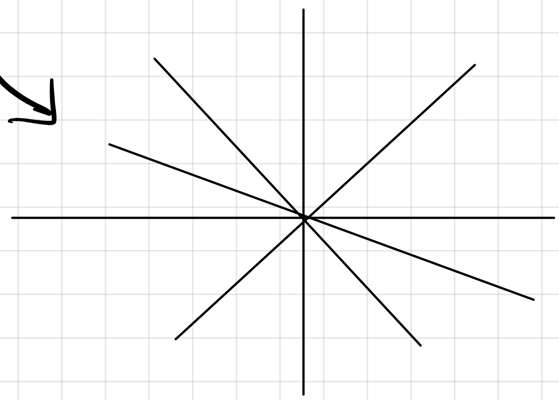
$\in \mathbb{P}_{15}$

$\notin \mathbb{P}_{14}$)

Dans

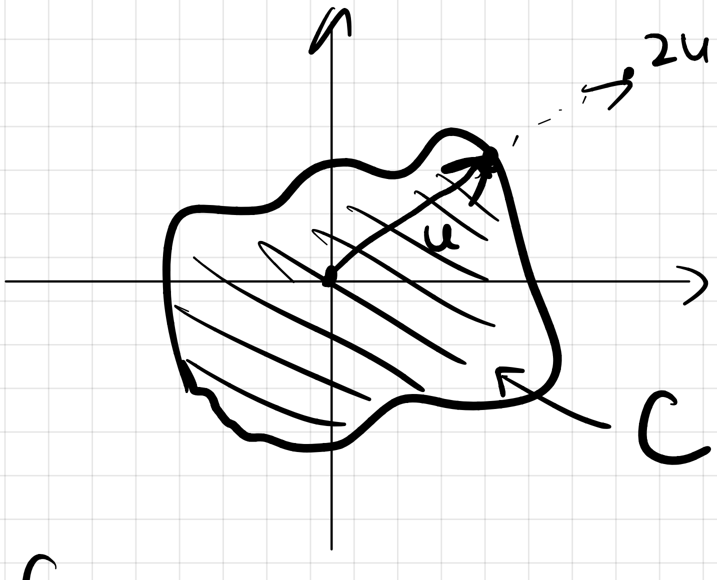
2) $V = \mathbb{R}^2$ les sous-e.v sont de 3 types :

- l'espace nul $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- les droites passant par l'origine $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- l'espace entier $\mathbb{R}^2$



par contre, tout ensemble "borné" n'est pas un S.E.V

<u>ex</u> :



$V = \mathbb{R}^2$

<u>n'est pas un S.E.V de $\mathbb{R}^2$</u>

$u \in C$

$2u \notin C$

3) $\mathbb{R}$ n'est pas un S.E.V. de $\mathbb{R}^2$

en génér. $\mathbb{R}^n$ n'est pas un S.E.V de $\mathbb{R}^m$

si $n \neq m$

en effet on n'a pas d'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1 \text{ comp.}}}{\mathbb{R}} \subset \underset{\substack{\uparrow \\ 2 \text{ composantes}}}{\mathbb{R}^2}$$

par contre tout droite passant par l'origine ressemble "bcp" à $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

& paramétrise la droite d'équation $y=0$ c.à.d l'axe Ox

4) De façon analogue un plan $\pi \subset \mathbb{R}^3$ est un S.E.V. de $\mathbb{R}^3$

$\Leftrightarrow$ π passe par l'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ex : $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ x, y \in \mathbb{R} \right\}$ = plan Oxy (d'équation $z=0$)

π est un ss-esp. de $\mathbb{R}^3$ qui ressemble "bcp" à $\mathbb{R}^2$, on dira plus tard

π est un S.E.V de dimension 2

5) Soit V un espace vectoriel et $W, W' \subseteq V$ 2 sous-espaces de V

alors

1) $W \cap W'$ est un S.E.V de V

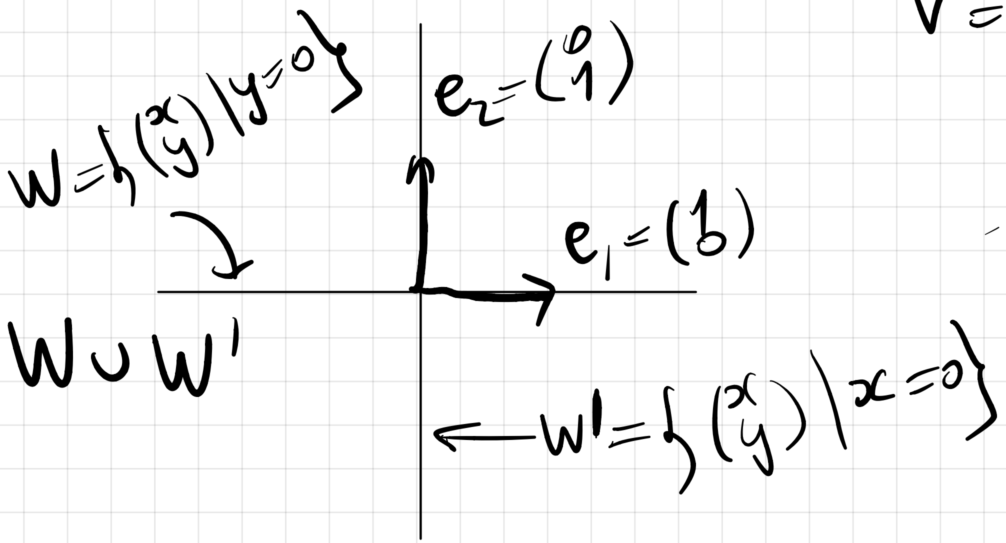
2) $W + W' \overset{\text{déf}}{\underset{\text{NEW}}{:=}} \left\{ w + w' \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} w \in W \\ w' \in W' \end{array} \right\}$

est un S.E.V de V

3) ⚠ en général $W \cup W'$ n'est pas un S.E.V

exemple :

$V = \mathbb{R}^2$



$e_1 + e_2 \notin W \cup W'$

Déf 4.2.4 : (Exemple important de sous-espace)

$$\left(\begin{array}{c} \text{nommé } \underline{\text{Vect}} \\ \text{ou Span} \\ \text{ou Lin} \end{array}\right)$$

Soit V un E.V.

soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et soient

$v_1, \dots, v_p \in V$ des vecteurs

on dénote par $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$

le sous-ens. de V

qui consiste en toutes les C.L.

des v_i, en formule :

$$\text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p \mid \text{t.q. } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$$

Prop. 4.2.5 : $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ est un sous-esp. vectoriel de V appelé l'espace engendré par $v_1, \dots, v_p$

démo : sur demande

Remarque 4.2.6 : $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel qui contient $v_1, \dots, v_p$

Définition 4.2.7 : Soit V un E.V et $W \subseteq V$ un sous-espace

On nomme partie génératrice de W tout ens. $\{v_1, \dots, v_p\}$ (avec $v_i \in W$) t.q $\text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\} = W$.

Donc, cela signifie que tout élém. de W s'écrit comme C.L. des $v_1, \dots, v_p$.

Exemples 4.2.8

1) $H = \left\{ \begin{pmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$

$v \in H \iff \exists a,b \in \mathbb{R}$ t.q $v = \begin{pmatrix} a-3b \\ b-a \\ a \\ b \end{pmatrix} =$

$$\overset{\mathbb{R}^4 \text{ est un EV}}{=} \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3b \\ b \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = a \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1 \in H \ni} + b \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2}$$

Ainsi $v \in H \iff v \in \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$

donc $H = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2\}$

(est un ss-ev de $\mathbb{R}^4$
H est un plan passant par l'origine)

2) $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$

Trouver pour quel(s) $t \in \mathbb{R}$ on a

$$y \in \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$$

revient à

échelonner la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & v_3 & y \end{array}\right)$$

et voir pour quel(s) $t \in \mathbb{R}$

il n'y a pas de pivot dans la dernière colonne (càd système compatible)

<u>explication</u>: En effet si $A = (v_1 \mid v_2 \mid v_3)$

alors $y \in \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$

$\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tq $y = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$

$\Leftrightarrow$ le système $Ax = y$ est compatible.

<u>solution de l'ex</u> : $t = 5$ (exercice suppl.)

3) $V = \mathbb{P}_3$ ← pol. de degré ≤ 3

$v_1 = 1$ pol. constant

$v_2 = t$ $\in \mathbb{P}_3$

$v_3 = t^2$

$$\text{Vect}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{Vect}\{1, t, t^2\}$$

$$= \{\lambda_1 1 + \lambda_2 t + \lambda_3 t^2 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{P}_2$$

et en fait $\mathbb{P}_3 = \text{Vect}\{1, t, t^2, t^3\}$

+ gén. $\mathbb{P}_n = \text{Vect}\{\underbrace{1, t, t^2, \dots, t^n}_{n+1 \text{ polynômes}}\}$

4) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$

$v_1 = \sin^2(t) \qquad v_2 = \cos^2(t)$

alors $1 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$

dit qe $1 \in \text{Vect}\{\sin^2(t), \cos^2(t)\}$

<u>NB</u> : ici 1 = la fonction constante $\left(1(t) = 1 \ \forall t \in \mathbb{R}\right)$

5) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$

$U = C(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est continue}\}$

U est un sous-ev de V

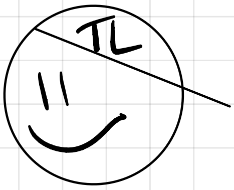
§4.3 Transformations linéaires

Déf 4.3.1 : Soient V et W des EV.

On nomme transformation linéaire (application)

toute fonction $T : V \to W$
$$v \mapsto T(v)$$

vérifiant 2 conditions $\quad \forall u, v \in V$
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$



$$\begin{cases} i) & \underbrace{T(u+v)}_{\text{somme dans } V} = \underbrace{T(u)+T(v)}_{\text{somme dans } W} \\ ii) & T(\lambda u) = \lambda T(u) \end{cases}$$

Rem 4.3.2 :

$T : V \to W$ est linéaire

$\Leftrightarrow$ $\forall u, v \in V$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a $\boxed{T(\lambda u + \mu v) = \lambda T(u) + \mu T(v)}$

en français : l'image d'une comb. linéaire de vecteurs est la comb. linéaire des images des vecteurs

Nota bene: $T: V \to W$ une fonction.

Si T est linéaire, alors on a toujours $T(0_V) = 0_W$

(en effet ii) avec $\lambda = 0$ donne $T(0_V) = 0_W$
$u \in V$ quelconque)

et donc si $T(0_V) \neq 0_W$
alors T n'est pas linéaire

Exemples 4.3.3 : (V, W des esp. vect.)

0) $0: V \to W$, $v \mapsto 0_W$ la transfo linéaire nulle

1) $id_V: V \to V$, $v \mapsto v$ est linéaire

1.5) $V \to V$, $v \mapsto -v$ est linéaire

2) toute matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

donne une T.L

$$T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$x \mapsto Ax \; .$$

<u>Définition(s) 4.3.4 :</u>

Soit $T : V \to W$ une transfo linéaire, on pose

$$\mathrm{Ker}(T) = \{ v \in V \mid T(v) = 0_W \}$$

= le noyau de T = the kernel of T

$$\mathrm{Im}(T) = \{ w \in W \mid \exists v \in V \text{ tq } T(v) = w \}$$

= <u>l'image de T</u> .

On a $\mathrm{Ker}(T) \subseteq V$

et $\mathrm{Im}(T) \leq W$

Théorème 4.3.6 : Soit $T : V \to W$ transfo linéaire alors

- $Ker(T)$ est un S.E.V de V
- $Im(T)$ est un S.E.V. de W

de plus

a) T est injective $\Leftrightarrow Ker(T) = \{0_V\}$

b) T est surjective $\Leftrightarrow Im(T) = W$.

(demo après la pause de la sem 7).

⚠ cela est faux si T n'est pas linéaire :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2$$

n'est pas injective

mais $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

n'est pas linéaire